

MATEMATIKA ČZU DERIVACE FUNKCE

Derivace funkce je definována limitou $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ Pokud tato limita existuje, je

rovna hodnotě derivace funkce ve zvoleném bodě x_0 . Lze ji tedy chápat jako změnu hodnot na ose „y“ vůči změně hodnot na ose „x“.

Např. změna dráhy v čase = rychlost. Změna rychlosti v čase = zrychlení.

Má souvislost s průběhem funkce, protože se jedná o směrnici tečny ke grafu funkce v daném (tzv. tečném) bodě.

Použití derivací na analýzu průběhu funkce

Monotonie funkce

$f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ je rostoucí (na intervalech, kde je funkce rostoucí jsou i její tečny rostoucí přímky, mají tedy kladnou směrnici a proto má funkce kladnou derivaci)

$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ je klesající (na intervalech, kde je funkce klesající jsou i její tečny klesající přímky, mají tedy zápornou směrnici a proto má funkce zápornou derivaci)

$f'(x) = 0 \rightarrow$ stacionární body (extrémy (lokální MAX či lokální MIN), nebo sedlové body)

Extrémy funkce – body, ve kterých funkce nabývá maximální či minimální hodnoty – lokální nebo globální extrémy. Musí se jednat o konkrétní bod (ne nekonečno), který leží v def. oboru a funkce v něm má konkrétní funkční hodnotu (opět ne nekonečno)

Lokální: LOK. MAX v bodě x_0 když $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) < 0$

LOK. MIN v bodě x_0 když $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$

nebo určit podle monotonie funkce, protože v těchto extrémech dochází ke změně monotonie.

Globální (absolutní): největší a nejmenší hodnota (vždy konkrétní číslo), které funkce nabývá (na ose y) na stanoveném intervalu **I** (na ose x) (případně na celém Df).

Zakřivenost (vypuklost) funkce

Určení intervalů z def. oboru, ve kterých se jedná o daný typ. Výpočet pomocí druhé derivace.

$f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ je konvexní (U)

$f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ je konkávní (∩)

$f''(x) = 0 \rightarrow$ body podezřelé z inflexe (inflexní body)

Inflexní body – body, ve kterých funkce mění svou zakřivenost. Podobně jako u extrémů se musí jednat o body z def. oboru s konkrétní hodnotou na obou osách „x“ i „y“, kterými funkce prochází.

Použití na výpočet limit – tzv. L'Hospitalovo pravidlo

Pokud platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ nebo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$, pak $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

pokud druhá limita existuje. Tj. limity typu 0/0 či ∞/∞ lze spočítat pomocí derivací.

Dále se derivace využívají na výpočet rovnic tečny či normály ke grafu funkce, aproximaci funkce pomocí Taylorova polynomu, v integrálech, diferenciálních rovnicích atd.

Doučování Petr Hadraba (matematika, statistika, ekonomicko matematické metody apod.), tel. 721755339, PHadraba@seznam.cz