

MATEMATIKA UJEP**MATICE**

Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 7 & -5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Vypočtete (pokud lze)

1) a) $2 \cdot A - B$, b) $E + 3 \cdot A$ c) $B^T + 2 \cdot F$

2) a) $C \cdot A$, b) $B \cdot F$, c) $A \cdot C$, d) $F \cdot C$

3) Určete hodnoty matic a) C , b) E

4) Vyřešte následující soustavu rovnic

$$\begin{array}{lll} -5x + 15y + 20z = 0 & x - 2y - 2z + 2t = 2 & x + y - 2z - t = 0 \\ a) \quad 7x - 23y - 34z = -20 & b) \quad -4x + 9y + 6z + 6t = -6 & c) \quad x + 2y + 3z + 2t = -4 \\ -2x + 14y + 25z = 45 & 2x - 3y - 4z + 6t = -2 & -2x - 4y + 2z + 4t = 0 \\ & -5x + 9y + 8z = 4 & 2x + 3y - 7z - 7t = 4 \end{array}$$

5) Určete všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{lll} 3x_1 - x_2 - x_3 = 0 & 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -3 & x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ a) \quad 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1 & b) \quad x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 3 & c) \quad x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 - 5x_2 = 0 & -3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 & 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 = -2 \\ & -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -6 & \end{array}$$

6) Naleznete všechna řešení následující soustavy rovnic

$$\begin{array}{ll} a) \quad 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 & b) \quad x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 & x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 & 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ & 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 4 \end{array}$$

7) Vypočtete obecné řešení soustavy rovnic (zapsané v maticovém tvaru)

$$\begin{array}{lll} a) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & 5 & 3 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 7 & -7 \end{array} \right) & b) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -3 & -2 & -8 \\ 4 & 17 & -8 & -13 & -38 \\ -5 & -25 & 0 & 31 & 69 \\ 12 & 46 & -39 & -18 & -85 \end{array} \right) & c) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -4 & 5 \\ -2 & -5 & -8 & 5 & -10 \\ 3 & 4 & 6 & 8 & 21 \\ -4 & -19 & -32 & 47 & -8 \end{array} \right) \end{array}$$

$$d) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 & 11 \\ 3 & 10 & -2 & 18 & 38 \\ -2 & -1 & 8 & 10 & 8 \\ 4 & 9 & -5 & 22 & 40 \end{array} \right) \quad e) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 3 & -30 \\ 2 & 9 & 1 & 8 & 40 \\ -3 & -15 & 4 & -10 & -24 \\ -2 & -9 & 0 & -3 & -14 \end{array} \right)$$

10)

a) Jakého typu musí být matice D, aby platilo $AD=B$, pokud matice A je typu 4×3 a matice B má 5 sloupců.

b) Matice C je typu 5×3 . Jakého typu jsou matice A a B, jestliže platí $AB^{-1}=C$

c) Jakého typu musí být matice C, aby platilo $AC^{-1}=B$, pokud matice A je typu 4×5

d) Jaký rozměr má matice C, když platí $A \cdot C^T = B$, přičemž matice A je 3×4 a matice B má 6 sloupců.

e) Definujte pojem inverzní matice k matici A a za jakých podmínek existuje a uveďte metody výpočtu inverzní matice.

f) Uveďte, jak je to s řešitelností soustavy homogenních lineárních rovnic, na čem počet řešení závisí a jak soustavu řešíme.

Další příklady a teorie k procvičování ze zkouškových testů

31) Nalezněte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{array}{ll} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 & 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ a) 5x_1 + 11x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 2 & b) 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 1 & 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \\ x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 & \end{array}$$

32) Vypočtěte obecné řešení soustavy rovnic (zapsané v maticovém tvaru)

$$a) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & -4 \\ -2 & -3 & 8 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & -12 & 16 & 18 \\ -4 & -8 & 14 & -20 & 20 \end{array} \right) \quad b) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & 4 & 8 \\ -2 & 11 & -3 & -11 & -10 \\ 3 & -22 & -11 & 31 & -16 \\ -4 & 39 & 42 & -67 & 76 \end{array} \right)$$

$$c) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -4 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 10 & 16 & -29 & 0 \\ 4 & 24 & 55 & -83 & 0 \end{array} \right)$$

34) Matice A je typu 5×2 a matice D je typu $3 \times x$. určete typ matice B, jestliže víme, že platí $(AB)^T = D$

35) a) Zapište libovolnou matici typu 2×5 a najděte k ní matici transponovanou.

b) Co se rozumí pojmem homogenní soustava lineárních rovnic, uveďte příklad libovolné soustavy homogenních lin. rovnic. Jak je to s řešitelností homogenní soustavy lin. rovnic a na čem závisí?

c) Co se rozumí pojmem nehomogenní soustava lineárních rovnic, uveďte příklad libovolné soustavy nehomogenních lin. rovnic. Jak je to s řešitelností nehomogenní soustavy lin. rovnic a na čem závisí? (Frobeniova věta)

d) Zapište libovolnou singulární matici, která má hodnost 4. (Tak, aby hodnost této matice byla zřejmá).

VÝSLEDKY

1) a) $\begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ -9 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ b) nelze c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

2) a) $\begin{pmatrix} 10 & -3 & -2 \\ -12 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -16 & 13 \\ 37 & -22 \end{pmatrix}$ c) nelze d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -4 \\ -13 & 8 \end{pmatrix}$

3) a) $h(C)=2$ b) $h(E)=3$

4) a) $(x;y;z) = (5 ; -5; 5)^T$ b) $(x,y,z,t)=(-18+6k; -6-2k; 6k-4; k)^T \quad k \in \mathbb{R}$

c) $(x,y,z,t)=(-3k-3; 2k+1; -k-1; k)^T \quad k \in \mathbb{R}$

5) a) nemá řešení b) $(x_1;x_2;x_3;x_4) = (1;2;3;4)^T$ c) $(x_1;x_2;x_3) = (1-t ; 2+t ; t)^T \quad t \in \mathbb{R}$

6) a) $(x_1 ; x_2 ; x_3 ; x_4) = \left(\frac{-2-9t+s}{11} ; \frac{10+t-5s}{11} ; s ; t \right)^T \quad s ; t \in \mathbb{R}$ b) $(x_1;x_2;x_3;x_4) = (1;2;1;-1)^T$

7) a) $(2+2t ; -15-8t ; 25+11t ; t)^T \quad t \in \mathbb{R}$ b) $\left(\frac{61-14t}{5} ; \frac{-26+9t}{5} ; \frac{-1+4t}{5} ; t \right)^T \quad t \in \mathbb{R}$

c) $(11-10t ; -12+13t ; 6-5t ; t)^T \quad t \in \mathbb{R}$ d) $(0 ; 2 ; 0 ; 1)$ e) nemá řešení

10) a) $D=3 \times 5$ b) $A=5 \times 3$ $B=3 \times 3$ c) $C=5 \times 5$ d) $C=6 \times 4$

31) a) nemá řešení b) $(x_1;x_2;x_3;x_4) = (1;2;-1;-2)^T$

32)

a) $(x_1;x_2;x_3;x_4) = (454/11 ; -207/11 ; 40/11 ; 9/11)^T$ b) $(x_1;x_2;x_3;x_4) = (2-25t ; -3t ; 2+2t ; t)^T \quad t \in \mathbb{R}$

c) $(x_1;x_2;x_3;x_4) = (t ; t ; t ; t)^T \quad t \in \mathbb{R}$

34) B je 2×3